

## Zápočtová písemka – NMAI059 – 4. 12. 2012 – Varianta A

- V komoře máte uložené tři krabice cukroví, které chcete dát svým příbuzným. Krabice obsahují vanilkové rohlíčky, linecká kolečka a vosí hnízda v různém poměru. Strýček Albert má v krabici jednotlivé druhy cukroví zastoupeny v poměru 1:2:5 (v pořadí uvedeném výše). V krabici pro bratrance Billa je poměr 2:3:3 a konečně pro sestřenici Penny máte nachystané cukroví v poměru 3:1:4.
  - O půlnoci se vydáte do komory zkontrolovat, že se cukroví nezkazilo. Potmě náhodně vyberete jednu ze tří krabic pro vaše příbuzné, z této krabice pak náhodně vyberete jeden kousek cukroví. Ochutnáním zjistíte, že to bylo vosí hnízdo. Jaká je pravděpodobnost, že jste ochutnávali z krabice pro strýčka Alberta?
  - Pak si uvědomíte, že strýček Albert má opravdu rád vosí hnízda a měli byste jít zkontrolovat, že se v jeho krabici nezkazily. Najdete jeho krabici a stále potmě – tedy náhodně – z ní vybíráte kousky cukroví, dokud nenarazíte na vosí hnízdo (pokud vyberete kousek cukroví jiného druhu, vrátíte tento kousek zpátky). Jaká je pravděpodobnost, že vrátíte právě  $k$  kousků? Určete pro všechny přípustné hodnoty  $k$ . Jaký je očekávaný počet vrácených kousků?
- Házíme třikrát mincí. Označme  $X$  počet líců v prvních dvou hodech a  $Y$  počet rubů v posledních dvou hodech.
  - Určete sdružené rozdělení vektoru  $(X, Y)$ .
  - Určete marginální rozdělení veličin  $X$  a  $Y$ . Jsou náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé?
  - Spočtete kovarianci  $\text{Cov}(X, Y)$  a korelační koeficient  $\rho_{XY}$ .
- Uvažujme náhodnou veličinu  $X$  s hustotou  $f(x) = 2x, x \in (0, c)$ , a jinde rovnou nule.
  - Určete hodnotu konstanty  $c$ , aby  $f(x)$  byla opravdu hustota náhodné veličiny.
  - Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny  $X$ .
  - Určete distribuční funkci náhodné veličiny  $X$  a její medián.
  - Uvažujte náhodnou veličinu  $Y$ , která má stejné rozdělení jako  $X$  a je s ní nezávislá. Určete sdruženou hustotu  $f_{(X,Y)}$  vektoru  $(X, Y)$  a korelační koeficient  $\rho_{X,Y}$ .
- Do letadla nastoupilo 100 cestujících. Hmotnosti jednotlivých cestujících jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 80 kg a směrodatnou odchylkou 25 kg (tj. rozptyl je 625 kg<sup>2</sup>).
  - Určete střední hodnotu a rozptyl celkové hmotnosti cestujících.
  - Jaká je pravděpodobnost, že celková hmotnost pasažérů přesáhne 8 500 kg?
  - Předpokládejme navíc, že hmotnost každého cestujícího má normální rozdělení se správnými parametry, tj.  $N(80, 625)$ . Jaká je pravděpodobnost, že hmotnost jednoho vybraného pasažéra bude větší než 85 kg?

*Hodně štěstí!*