Spojitá náhodná veličina

2. 11.–6. 11. 2015

1. Délka odpoledního spánku dítěte (v hodinách) se řídí rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 3]$, tj. má hustotu
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \in [0, 3], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   (a) Spočtěte distribuční funkci F veličiny X a načrtněte její graf. Interpretujte hodnotu $F(x)$.
   (b) S jakou pravděpodobností bude dítě spát přesně 1 hodinu? S jakou pravděpodobností bude spát alespoň jednu hodinu? S jakou pravděpodobností bude spát déle než půl hodiny, ale ne déle než 2 hodiny?
   (c) Jaká je očekávaná délka spánku dítěte?
   (d) Spočtěte rozptyl délky spánku dítěte.
   (e) Dítě spí již jednu hodinu. Jaká je pravděpodobnost, že celkový spánek bude delší než dvě hodiny?

2. Délka telefoního hovoru (v minutách) paní Zuzany je náhodná veličina s hustotou
$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x/5}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu $c > 0$, tak aby f byla hustota.
   (b) Jaká je střední délka hovoru paní Zuzany?
   (c) Určete distribuční funkci F a načrtněte ji.
   (d) Jaká je pravděpodobnost, že paní Zuzana bude volat déle než 10 minut?
   (e) Paní Zuzana již volá 5 minut. Jaká je pravděpodobnost, že celkový hovor bude delší než 10 minut?
   (f) Spočtěte rozptyl délky hovoru.

   Paní Zuzana má tarif vedený u telefoního operátora XY. Operátor XY účtuje spojovací poplatek 1 Kč a dále pak spojitě od začátku hovoru se sazbou 3Kč/min.

   (g) Určete distribuční funkci ceny hovoru paní Zuzany.
   (h) Jaká je očekávaná cena a rozptyl ceny jednoho hovoru paní Zuzany?

3. V lese o tvaru rovnostranného trojúhelníku o straně a se ztratil pes Alík. Náhodná veličina X udává vzdálenost Alíka od pevně zvolené strany lesa, kde stojí jeho majitel. Určete distribuční funkci, hustotu a očekávanou hodnotu X.

Opakování

Spojitá náhodná veličina:

Nechť pro náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F existuje funkce $f \geq 0$ taková, že $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Pak říkáme, že X má **spojité rozdělení**. Funkce f se nazývá **hustota**.

Vlastnosti.

– Spojitá náhodná veličina nabývá **nespočetně mnoha** hodnot z nějakého podintervalu $\mathbb{R}$.

– Rozdělení veličiny X je charakterizováno hustotou $f \geq 0$. Pro každou $B \in \mathcal{B}$ je pak

$$\mathsf{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx.$$

Speciálně:

(a) $1 = \mathsf{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$,

(b) distribuční funkce F je spojitá na $\mathbb{R}$ a lze ji spočítat jako

$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

(c) pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ je $\mathsf{P}(X = a) = \int_{\{a\}} f(t)dt = 0$,

(d) je-li $a < b$, pak

$$\mathsf{P}(a < X < b) = \mathsf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

– **Střední hodnota** X se spočte jako

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad \text{(existuje-li)}.$$

Střední hodnota veličiny $Y = h(X)$ se spočte jako $\mathsf{E}h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$ (existuje-li). Speciálně tedy

$$\mathsf{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx, \quad \mathsf{Var}\, X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2.$$

– Při výpočtech se někdy hodí používat tzv. **gama funkci**, která je pro $p > 0$ definovaná jako

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx.$$

Platí

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. Speciálně, je-li $n \in \mathbb{N}$, pak $\Gamma(n) = (n-1)!$,
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,
- pro libovolné $a > 0$ platí
$$\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}.$$