

NÁHODNÉ VEKTORY

9.–13.11.2015

-
1. Pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Náhodná veličina X udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi, veličina Y udává počet starších bratrů nejmladšího dítěte v téže rodině.
 - (a) Odvoďte rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)^T$.
 - (b) Jaké jsou marginální rozdělení veličin X a Y ?
 - (c) Jsou veličiny X a Y nezávislé?
 - (d) Spočítejte kovarianci X a Y . Jaký je vztah mezi nezávislostí dvou veličin a jejich kovariancí?
 - (e) Spočítejte korelační koeficient mezi X a Y .

2. Náhodná veličina X udává dobu, kterou strávíte čekáním na tramvaj na Malostranském náměstí (v minutách) a náhodná veličina Y udává dobu, kterou následně strávíte čekáním na metro A ve stanici Malostranská (také v minutách). Ze zkušenosti víme, že náhodný vektor $(X, Y)^T$ má spojitě rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Jaké je rozdělení jednotlivých dob čekání (na tramvaj a na metro zvlášť)?
 - (b) Spočítejte kovarianci X a Y .
 - (c) Jsou doby strávené čekáním na tramvaj a na metro nezávislé?
 - (d) Jaká je střední doba Vašeho celkového čekání na dopravní prostředky?
3. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1, 1)$. Označme $Y = X^2$. Spočítejte kovarianci veličin X a Y a jejich korelační koeficient ρ_{XY} . Jsou X a Y nezávislé?
4. Zmatená šatnářka náhodně přiřadí n pánům jejich klobouky. Náhodná veličina X_i je indikátor jevu, zda má i -tý pán správný klobouk, $i = 1, \dots, n$ (tj. $X_i = 1$, pokud i -tý pán má svůj klobouk a $X_i = 0$ jinak).
 - (a) Spočítejte střední hodnotu a rozptyl veličiny X_i pro pevně zvolené i .
 - (b) Jsou veličiny X_i, X_j pro pevné i, j nezávislé?
 - (c) Spočítejte kovarianci X_i a X_j .
 - (d) Na základě výše uvedených výsledků spočítejte očekávanou hodnotu a rozptyl počtu správně přiřazených klobouků. (Využijte fakt, že počet správně přiřazených klobouků X lze vyjádřit jako $X = \sum_{i=1}^n X_i$.)

OPAKOVÁNÍ Z PŘEDNÁŠKY

KOVARIANCE A KORELACE: Kovariance $\text{Cov}(X, Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = E(XY) - (EX)(EY),$$

je-li $EX^2 < \infty$, $EY^2 < \infty$.

Koeficient korelace ρ_{XY} je definován jako

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var } X} \sqrt{\text{Var } Y}},$$

je-li $\text{Var } X, \text{Var } Y > 0$. Platí vždy $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$. Korelační koeficient je mírou lineární závislosti mezi X a Y .

MARGINÁLNÍ ROZDĚLENÍ:

- (a) Jestliže má $(X, Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j) , pak marginální rozdělení veličiny X je diskrétní a spočteme jej jako

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j).$$

- (b) Jestliže má $(X, Y)^T$ spojitě rozdělení s hustotou $f(x, y)$, pak marginální hustotu veličiny X spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Podobně pro marginální hustotu f_Y veličiny Y .

NEZÁVISLOST:

- (a) Jestliže má $(X, Y)^T$ spojitě rozdělení s hustotou f , X má marginální hustotu f_X a Y má hustotu f_Y , pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \text{ pro s.v. } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (b) Jestliže má $(X, Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j) , pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \text{ pro všechna } x_i, y_j.$$

DALŠÍ UŽITEČNÉ VLASTNOSTI: Jestliže X_1, \dots, X_n jsou náhodné veličiny a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

- $E(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i EX_i$
- $\text{Var}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var } X_i + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$