Klasická pravděpodobnost

5. – 9. 10. 2015

1. Házíme čtyřmi šestistěnnými hracími kostkami. Určete, jaká je pravděpodobnost, že
   (a) padnou čtyři různá čísla,
   (b) padnou pouze lichá čísla,
   (c) součet čísel na všech kostkách dohromady bude roven 6,
   (d) součet čísel bude větší než 5,
   (e) padne alespoň jedna šestka.
2. V regálu je 6 lahví Finské vodky a 4 lahve Božkovské vodky (vizuálně k nerozeznání). Náhodně vybereme z regálu 3 lahve a z každé ochutnáme. Určete, s jakou pravděpodobností
   (a) byla právě ve dvou námi ochutnaných lahvích Božkovská vodka,
   (b) byla alespoň v jedné námi ochutnané lahvi Božkovská vodka.
3. Uvažujme n různých novomanželů a n různých novomanželek (každá novomanželka je provdaná právě za jednoho ze zmíněných novomanželů). Zmatená organizátorka přiřadí na svatební cestu novomanželky k novomanželům zcela náhodně.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jedna novomanželka na svatební cestě se správným novomanželem?
   (b $\star$) Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$ a zjistěte, jak se tato limita liší od přesného výsledku pro $n = 5$ a $n = 10$.
4. Na cvičení z Pravděpodobnosti a statistiky se r studentů rozděluje do n paralelek cvičení. Předpokládejme, že každý student si vybírá skupinu náhodně a že počet studentů ve skupinách je neomezený.
   (a) Určete pravděpodobnost, že na úterní cvičení v 10:40 přijde právě k studentů.
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že na každém cvičení bude alespoň jeden student?
   (c $\star$) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.
5. Babička rozděluje r tisícikorun do n obálek pro svých n vnoučat k Vánocům. Peníze rozmístí náhodně (všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná).
   (a) Určete pravděpodobnost, že vnuk Petr dostane právě k tisícikorun.
   (b) Určete pravděpodobnost, že každé vnouče dostane alespoň nějaké peníze.
   (c $\star$) Spočtěte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.
6. Na svazku máme n různých klíčů a pokoušíme se odemknout zámek. Vyzkoušený klíč vždy dáme stranou a náhodně vybereme další klíč ze zbývajících. Jaká je pravděpodobnost, že odemkneme právě na k-tý pokus?

Opakování

Klasická definice pravděpodobnosti:

- Ω je množina všech možných výsledků náhodného pokusu
- $\omega \in \Omega$ elementární jev
- $A \subset \Omega$ náhodný jev
- Nechť Ω obsahuje **konečný** počet prvků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, a nechť všechny elementární jevy ω_i jsou **stejně pravděpodobné**. Pak pravděpodobnost náhodného jevu A definujeme jako

  $$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n},$$

  kde $|A|$ = počet prvků množiny A.

Vlastnosti:

- $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$,
- $\mathsf{P}(A^c) = 1 - P(A)$,
- jestliže $A \subset B$, pak $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$ a $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$,
- $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B^c)$,
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$,
- (princip inkluze a exkluze)

  $$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum\sum_{i<j} \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$