NMAI059 – Pravděpodobnost a statistika

podle přednášky Daniela Hlubinky (hlubinka@karlin.mff.cuni.cz)
zapsal Pavel Obdržálek (pobdr@matfyz.cz)

2015/2016

poslední změna: 14. prosince 2015

1. přednáška 6. 10. 2015

1) Co je to pravděpodobnost?

Pravděpodobnost je něco mezi 0 a 1.

2) Pravděpodobnostní prostor

Mějme d-stěnnou kostku, na které můžeme dostat výsledky $1, \dots, d$, potom

Ω je množina elementárních jevů – neprázdná

- $\{1, 2, \dots, d\}$ a každý prvek teto množiny je elementárním jevem

$\mathcal{F}$ je systém podmnožin Ω, ten splňuje:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$ (prvky $\mathcal{F}$ jsou podmnožinou Ω)
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$ (s každým jevem je v $\mathcal{F}$ i doplňkový jev)
3. Pro libovolné $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ je $\cup A_i \in \mathcal{F}$ (spočetné či konečné)

- $\mathcal{F}$ nazveme σ-algebrou na Ω
- prvky $\mathcal{F}$ jsou náhodné jevy

P množinová funkce na $\mathcal{F}$ se nazývá pravděpodobnost (pravděpodobnostní míra) pokud:

1. $\forall F \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(F) \leq 1$ (P vezme množinu $\mathcal{F}$ a přiřadí jí číslo mezi 0 a 1)
2. Pro $F_1, F_2, \dots$ po dvou disjunktní, platí $P(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(F_i)$
3. $P(\Omega) = 1$

DEFINICE 1. *Trojice* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ *se nazývá* ***pravděpodobnostní prostor****.*

3) Vlastnosti a počítání pravděpodobnosti

Z axiomu P plyne $P(A) = 1 - P(A^c)$ (věta o doplňkové pravděpodobnosti).
VĚTA 2. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Důkaz. Pro $B \subset A$ platí, že $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$.

$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup E_2 \backslash E_1$ (disjunktní).

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1 \cup (E_2 \backslash E_1)) = P(E_1) + P(E_2 \backslash (E_1 \cap E_2)) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ □

VĚTA 3 (Princip inkluze a exkluze). *Buďte* $E_1, \dots, E_n$ *náhodné jevy, pak pravděpodobnost sjednocení* $P(\cup_{i=1}^{n} E_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(E_i) - \Sigma\Sigma_{1 \leq i < j \leq n} P(E_i \cap E_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(\cap_{i=1}^{n} E_i)$

Důkaz. Pomocí matematické indukce. □

Definice 4 (Nezávislé jevy).

- *Náhodné jevy E_1, E_2 jsou nezávislé, pokud $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$.*
- *Náhodné jevy E_α, kde $\alpha \in A$ jsou navzájem nezávislé, pokud pro každou $I \subset A$ platí $P(\cap_{i\in I} E_i) = \Sigma_{i\in I} P(E_i)$.*

Definice 5 (Podmíněná pravděpodobnost). *Buďte E a F náhodné jevy, $P(F) > 0$. Podmíněná pravděpodobnost jevu E za podmínky F je dána $P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$.*

Poznámka 6. *Platí, že $P(F|F) = 1$.*

Věta 7. *Jsou-li E a F nezávislé jevy a $P(F) > 0$, pak $P(E|F) = P(E)$.*

Důkaz. $P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(E)P(F)}{P(F)} = P(E)$ □

Poznámka 8. *Každý jev s pravděpodobností 0 nebo 1 je nezávislý s libovolným jevem.*

2. přednáška 13. 10. 2015

1) Věty užitečné pro výpočet pravděpodobnosti

Věta 9 (O násobení pravděpodobností). *Buďte $E_1, E_2, \dots, E_n$ náhodné jevy takové, že $P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) > 0$.*
Potom: $P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1}) \cdot P(E_{n-1}|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-2}) \cdot \dots \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_1)$

Důkaz. Z definice: $P(E_n \cap (E_1 \cap \dots \cap E_{n-1})) = P(E_n|E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \cdot P(E_1 \cap \dots \cap E_{n-1})$ □

Věta 10 (O úplné pravděpodobnosti). *Buďte $E_1, E_2, \dots, E_n$ náhodné jevy takové, že*

1. $E_i \cap E_j \neq 0 \forall i \neq j$
2. $P(E_i) > 0 \forall i$
3. $\cup_{i=1}^n E_i = \Omega$

a B náhodný jev.
Potom: $P(B) = \Sigma_{i=1}^n P(B|E_i) \cdot P(E_i)$

Důkaz. $P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (\cup_{i=1}^n E_i)) = P(\cup_{i=1}^n (B \cap E_i)) = \Sigma_{i=1}^n P(B \cap E_i) = \Sigma_{i=1}^n P(B|E_i) \cdot P(E_i)$ □

Poznámka 11. *Věta platí i pro spočetný disjunktní rozklad.*

Věta 12 (Bayesova). *Za podmínek*

1. $E_i \cap E_j \neq 0 \forall i \neq j$
2. $P(E_i) > 0 \forall i$
3. $\cup_{i=1}^n E_i = \Omega$
4. $P(B) > 0$

platí, $P(E_i|B) = \dfrac{P(B|E_i) \cdot P(E_i)}{\Sigma_{j=1}^{n} P(B|E_j) \cdot P(E_j)}$, *kde* $P(E_i)$ *je „apriorní rozdělení“,* B *je „informace“ a* $P(E_i|B)$ *je „aposteriorní pravděpodobnost“.*

Důkaz. $P(E_i|B) = \dfrac{P(E_i \cap B)}{P(B)}$, v čitateli $P(E_i \cap B) = P(B|E_i) \cdot P(E_i)$, ve jmenovateli věta o úplné pravděpodobnosti. □

Mějme 2 polynomy $R(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ a $Q(x) = x^n + \cdots$ (má celočíselné kořeny). Odhalit: $Q \neq R$.

- Dosadíme-li číslo 1 do $R(x) - Q(x)$, pak, jsou-li R a Q různá, jen s malou pravděpodobností dostaneme 0.
- $R - Q$ má nejvýše n různých kořenů. Vezměme $100n$ různých celých čísel a z nich náhodně 1 vybereme. **Pravděpodobnost toho, že vybrané číslo je kořenem $R - Q$ (jsou-li $R \neq Q$, je nejvýše $\dfrac{n}{100n} = \dfrac{1}{100}$.**
- Vybereme-li náhodně opakovaně k čísel z oněch $100n$ čísel, pak jsou-li $R \neq Q$, pak $P(R(x_i)) = Q(x_i) \forall i = 1 \ldots k \leq \left(\dfrac{1}{100}\right)^k$

2) Náhodná veličina

Hod dvěma kostkami:

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$
- $\omega = (i, j), i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- součet hodů na kostkách: $\omega_1 + \omega_2$
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$, zde $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$, kde **X je náhodná veličina**
- řešíme problém $P(X = x) = ?$

Definice 13 (Náhodná veličina a náhodný jev). *Zobrazení* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *takové, že* $\forall a \in \mathbb{R}$ *platí, že* $X^{-1}(-\inf, a] = \{\omega; X/\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ *nazveme náhodná veličina (tj.* $\{\omega; X/\omega) \leq a\}$ *je náhodný jev).*

Poznámka 14. *Pokud je diskrétní, bude nabývat nejvýše spočetně mnoho hodnot.*

Definice 15 (Rozdělení náhodné veličiny). *Buď* $X : \omega \to \mathbb{R}$ *náhodná veličina* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *pravděpodobnostní prostor. Rozdělením náhodné veličiny* X *se rozumí pravděpodobnostní míra* P_X *na* $\mathbb{R}$ *takovou, že* $P_X([a, b]) = P(\{\omega, V(u) \in (a, b] = P(\{, X(\omega) \leq b\}\omega, (\omega) \leq b\} - P \forall a < b$

Poznámka 16. *Takto zavedená pravděpodobnost* P_X *může být rozšířena na libovolnou* $\sigma-$ *algebru obsahující všechny otevřené podmnožiny* $\mathbb{R}$*, speciálně všechny intervaly.*

Tvrzení 17. *Pro diskrétní náhodnou veličinu* X *je rozdělení jednoznačně dáno hodnotami* $\{p_s; s \in S\} p_s = P(x = s) = P(\{\omega : x/\omega) = s\})$

$P_X((a, b]) = \Sigma_{s \in S \cap (a,b]} p_s$ splňuje všechny oblasti pravděpodobnosti. Hodnoty $\{p_s, s \in S\}$ jsou hodnotou rozdělení X vůči čítací míře na S. Musí platit $p_s = 0 \forall s, \Sigma_{s \in S} p_s = 1$. $\alpha(A) = |A|$ počet bodů A vhodný pro konečné či spočetné množiny.

3) Klasická pravděpodobnost

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, kde $|\Omega| < \infty$. Pro $|\Omega| = \infty$ musí být Ω spočetná.

DEFINICE 18 (Distribuční funkce). *$F : \mathbb{R} \to [0,1]$ je definovaná jako $F(x) = P(X \leq x)$, což pro diskrétní náhodnou veličinu je $F(x) = \Sigma_{s \leq x} p_s$. Jinými slovy $F_X(a) = P[X \leq a] = P_X(-\infty, a]$, $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$*

Jak distribuční funkce F, tak i hodnota $\{p_s, s \in S\}$ plně charakterizují rozdělení v X, tedy pravděpodobnost P_X. P_X je jednoznačně dána F.

POZNÁMKA 19. *Různé náhodné veličiny mohou mít stejné rozdělení.*

3. přednáška 20. 10. 2015

1) Míra

Míra je množinová funkce, která vezme množinu a dá ji nějakou hodnotu. Míra je vždy nezáporná.

2) Příklady míry

DEFINICE 20 (Lebesgenova míra). *λ na $\mathbb{R}$, $\lambda(a,b) = b-a$ pro $b > a$, $\lambda\langle a,b\rangle = b-a$ pro $b \leq a$. Dává délku intervalu.*

DEFINICE 21 (Čítací (aritmetická) míra). *$\alpha(A) = |A|$. Udává počet prvků, které jsou*

TVRZENÍ 22 (Vlastnosti distribuční funkce). *Mějme $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pravděpodobnostní prostor a náhodnou veličinu X a její distribuční funkci F_X. Pak*

- *F_X je neklesající a zprava spojitá*
- $\lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0$, $\lim_{a \to \infty} F_X(a) = 1$

VĚTA 23. *Buď F funkce, která splňuje všechny body předchozího tvrzení. Pak existuje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pravděpodobnostní prostor a náhodná veličina X tak, že F je distribuční funkce.*

DEFINICE 24. *Náhodné veličiny X a Y jsou nezávíslé, pokud $\forall n, k \in \mathbb{Z}$ platí: $P[X = n, Y = k] = P[X = n]P[Y = k]$.*
Celočíselné náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou vzájemně nezávislé, pokud $\forall I \subset \{1, \ldots, N\}$ a $\forall n_i \in \mathbb{Z}, i \in I$ platí $P[\cap_{i \in I}[X_i = n_i]] = \Pi_{i \in I} P[X_i = n_i]$

3) Charakteristiky náhodné veličiny

DEFINICE 25 (Střední hodnota CNV). *CNV X má konečnou střední hodnotu EX, pokud $\Sigma_{n \in \mathbb{Z}} |n| P[X = n] = \Sigma_{n \in \mathbb{Z}} |n| P_n < \infty$. V tom případě $EX = \Sigma_{n \in \mathbb{Z}} n \cdot P_n$*

VĚTA 26 (Aditivita střední hodnoty). *Pro CNV X a Y s konečnou EX a EY platí, že $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$*

VĚTA 27 (Násobení střední hodnoty konstantou). *Buď X CNV a $c \in \mathbb{R}$, $EX < \infty$. Potom $E(cX) = c \cdot EX$.*

4. přednáška 27. 10. 2015

1) Další charakteristiky náhodné veličiny

DEFINICE 28 (Moment náhodné veličiny). *Momentem náhodné veličiny rozumíme hodnotu* $EX^p = \Sigma_{i\in\mathbb{Z}} i^p P[X = i]$

DEFINICE 29 (Centrální moment náhodné veličiny). *Centrálním momentem náhodné veličiny rozumíme hodnotu* $E(X - EX)^p = \Sigma_{i\in\mathbb{Z}}(i - EX)^p P[X = i]$

DEFINICE 30 (Rozptyl náhodné veličiny). *Pokud* $EX^2 < \infty$, *pak* $var(X) = E(X - EX)^2$ *nazveme rozptylem náhodné veličiny* X. *Rozptyl charakterizuje variabilitu náhodné veličiny okolo její střední hodnoty.*

VĚTA 31 (Jensenova nerovnost). *Buď* X *náhodná veličina a* f *konvexní funkce takové, že* $E|X| < \infty$ *a* $E|f(X)| < \infty$. *Pak* $Ef(X) \geq f(EX)$.

Důkaz. Důkaz pomocí Taylorova rozvoje f kolem EX. □

1).1 Základní vlastnosti rozptylu

- $var(X+a) = E(X+a-E(X+a))^2 = E(X+a-E(X+a))^2 = E(X+a-EX+a)^2 = E(X-EX)^2 = var(X)$
- $var(c) = E(c - Ec)^2 = 0$
- $var(cX) = E(cX - EcX)^2 = Ec^2(X - EX)^2 = c^2 \cdot var(X)$
- $var(X+Y) = E(X+Y-E(X+Y)^2 = \cdots = var(X)+var(Y)+2E(X-EX)(Y-EY)$

DEFINICE 32 (k-rozměrný náhodný vektor). *Buď* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ *pravděpodobnostní prostor, pak zobrazení* $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$, *kde* $k \geq 2$ *splňující* $\{\omega : \cap \{\omega : X_i(\omega) \leq a;\}\, i = 1 \ldots k\} \in \mathcal{F} \forall (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ *nazveme* k*-rozměrný náhodný vektor.*

DEFINICE 33 (Soustředné rozdělení náhodného vektoru). *Pravděpodobnost* $P_{X_\sim}$ *definovaná na* $\mathbb{R}^k$ *předpisem* $P_{X_\sim}\left[X_{i=1}^k(-\infty, a_i]\right] = P\left[\cap_{i=1}^k (X_i \leq a_i)\right] = P\left\{\omega : \cap_{i=1}^k \{\omega : X_i \leq a_i\}\right\}$ *se nazývá soustředné rozdělení náhodného vektoru* X.

DEFINICE 34 (Marginální rozdělení náhodného vektoru). *Pro podvektor* $Y = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_d}$, *kde* $d < k$ *náhodného vektoru* $X_\sim$ *definujeme marginální rozdělení* $X_\sim$ *jako* $P_{Y_\sim}(X_{j=1}^d(-\infty, a_{i_j}]) = P\left\{\omega : \cap_{j=1}^k \{\omega : X_{i_j} \leq a_{i_j}\}\right\} = P\left\{\omega : \cap_{i=1}^k \{\omega : X_i \leq a_i\},\ kde\ a_i = \infty\ pro\ i \neq i_1 \ldots i_d\right\}$

5. přednáška 3. 11. 2015

1) Náhodný vektor

$X_\sim = (X_1, \ldots, X_k) : \Omega \to \mathbb{R}^k\ P(X_1 \leq a_1, \ldots, X_k \leq a_k) = P\{\cap_{i=1}^k (X_i(u) \leq a)\}\ P_X(X_{i=1}^k(-\infty, a_i])$

2) Marginální rozdělení

Marginální rozdělení je rozdělení podvektoru náhodného vektoru X, např. rozdělení $(X_1, \ldots, X_{k-1})$ a to dostaneme z rozdělení X volbou $a_k = \infty$. Nejdůležitější jsou rozdělení jednotlivých složek $X_1, X_2, \ldots, X_k$.
Příklad:
(X,Y) házím dvěma kostkami, X je výsledek na první kostce, Y je součet na obou kostkách

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$						$\frac{1}{6}$
2		$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$					$\frac{1}{6}$
3			$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$				$\frac{1}{6}$
4				$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$\frac{1}{6}$
5					$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$		$\frac{1}{6}$
6						$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\frac{1}{6}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	36

DEFINICE 35 (Nezávislost celočíselných náhodných veličin). *Celočíselné náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, pokud $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ platí $P(X = m, Y = n) = P(X = m)P(Y = n)$. Toto lze zobecnit.*

DEFINICE 36 (Podmíněné rozdělení). *Buď (X, Y) CNV. Rozdělení*

$$P[X = k|Y = l] = \frac{P[X = k, Y = l]}{P[Y = l]}; P[Y = l] > 0, k \in \mathbb{Z}$$

nazveme podmíněné rozdělení X za podmínky $Y = l$.

6. přednáška 10. 11. 2015

1) Kovariace a korelace

Buď (X, Y) náhpodný vektor takový, že má konečné druhé momenty složek (tj. $EX^2 < \infty$, $EY^2 < \infty$)

DEFINICE 37 (Kovariace). $cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E(XY) - EX \cdot EY$

DEFINICE 38 (Korelace). $\rho_{X,Y} = \dfrac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}$

1).1 Základní vlastnosti kovariace a korelace

VĚTA 39. *Buď (X, Y) náhodný vektor, pak:*

1. *Jsou-li X a Y nezávislé, pak $cov(X, Y) = 0$ – X a Y jsou **nekorelované**. Z toho ale neplyne nezávislost X a Y.*

2. $cov(aX + b, Y) = a \cdot cov(X, Y)$

3. $cov(X + Y, Z) = cov(X, Z) + cov(Y, Z)$

Pozorování:

- $cov(X,X) = var(X)$
- $var(X+X) = var(X) + var(X) + 2cov(X,X) = 4var(X)$
- je-li $cov(X,Y) \gtrless 0$, pak $var(X+Y) \gtrless var(X) + var(Y)$
- $var(X-Y) = E(X-Y-E(X-Y))^2 = var(X) - 2cov(X,Y) + varY$
- jsou-li X a Y nekorelované, pak $var(X+Y) = var(X) + var(Y)$
- $cov(X,Y) = cov(Y,X)$

7. přednáška 24. 11. 2015

1) Podmíněná střední hodnota

Střední hodnota $EX = \Sigma_k P[X=k]$

Podmíněná střední hodnota $E[X|Y=y] = \Sigma_k P[X=k|Y=y]$

Pokud jsou X a Y nezávislé, pak zřejmě $E[X|Y=y] = EX$

$P[X=x|Y=y] = P[X=x], \forall x,y \Leftrightarrow X$ a Y jsou nezávislé

Vidíme, že $E[X|Y=y] = EX$ je funkcí y

Definice 40. *$E[X|Y]$ je náhodná veličina, která na množině $\{\omega : Y(\omega) = y\}$ nabývá hodnoty $E[X|Y=y]$*

Tedy:

$E[X|Y] : \Omega \to \mathbb{R}$ náhodná veličina

$E[X|Y](\omega) = E[X|Y=y]$ pokud $Y(\omega) = y$

$E[X|Y] = f(Y)$ pro nějakou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Věta 41. *Platí $E[E[X|Y]] = EX$ mají-li obě strany smysl.*

Důkaz. $E[E[X|Y]] = E(f(X)) = \Sigma_k f(k) P[Y=k] = \Sigma_k E[X|Y=k] P[Y=k] = EX$ □

2) Modely rozdělení diskrétních náhodných veličin

Alternativní rozdělení (Bernoulliho pokus) ($Alt(p)$) Náhodná veličina X nabývá pouze dvou hodnot ($x \in \{0,1\}$. Parametr p je potom definován jako $p = P[x=1] = 1 - P[x=0]$. Odtud potom $EX = p, EX^2 = p \to$ var $x = p - p^2 = p(1-p)$

Binomické rozdělení ($Bi(n,p)$) Začneme oponovat (nezávisle) bernoulliovské pokusy (se stejným p). Dostaneme posloupnost 0 a 1. Jaké rozdělení má počet úspěchů v n pokusech?
$Y = \Sigma_{i=1}^n X_i =$počet úspěchů
$P[y=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$EY = np,$ var $Y = np(1-p)$

Geometrické rozdělení ($Geom(p)$) zjišťuje délku čekání na 1 úspěch.

$Y = min\{i : X_i = 1\} - 1$

$P[y = k] = p(1-p)^k$

$EY = \dfrac{1-p}{p}$

Negativní binomické rozdělení ($NB(k,p)$) nám přináší počet neúspěchů před prvním úspěchem

$Y = \Sigma_{i=1}^{k} Y_i$, kde Y_i jsou nezávislé náhodné vektory geometrického rozdělení

$P[Y = j] = \binom{j+k-1}{j}(1-p)^j p^k$, kde j je počet neúspěchů a k počet úspěchů, tedy $j+k$ je počet pokusů

Poissonovo rozdělení ($Po(\lambda)$)

$P[X_n = k] = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, tedy $P[Y = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$EY = \lambda$

$varY = \lambda$

Hypergeometrické rozdělení je v podstatě binomické s racionálním p

$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$EX = n\frac{M}{N}$, kde N je počet všech jevů, M je počet příznivých a n je počet provedení

Multinomické rozdělení je obecné rozdělení s více možnými výsledky, k je počet výsledků $\{a_1 \ldots, a_k\}$

$P(X_i = a_j) = p_j$, kde $p_j > 0$ a zároveň $\Sigma_{j=1}^{k} p_j = 1$

Zaveďme $Z_i = (Z_{i_1}, \ldots, Z_{i_k})$, kde $Z_{i_j} = 1 \Leftrightarrow X_i = a_j$, jinak $Z_{i_j} = 0$

$Y = \Sigma_{i=1}^{n} Z_i$

$P[Y = (n_1, \ldots n_k)] = \dfrac{n!}{n_1! \cdot \cdots \cdot n_k!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{n_k}$ pro $\forall (n_1, \ldots, n_k)$ takové, že $n_1 > 0$ a zároveň $\Sigma_{i=1}^{k} n_i = n$

8. přednáška 1. 12. 2015

9. přednáška 8. 12. 2015

10. přednáška 15. 12. 2015

11. přednáška 22. 12. 2015

12. přednáška 5. 1. 2016

13. přednáška 12. 1. 2016